韓國地籍學會誌 第35卷 第2號 2019. 8(2) : 87~110

지적삼각측량의 근사조정과 엄밀조정 비교분석 연구

A Study on Comparative Analysis of Approximate Adjustment and Rigorous Adjustment in Cadastral Triangulation

박 민 호* · 이 창 경**
Park, Min Ho · Lee, Chang Kyung

요 약

본 연구에서는 삼각측량에 있어 대표적인 삼각망 유형 중 선행연구에서 이미 다루어진 사각망을 제외한 유심다각망, 삽입망, 삼각쇄에 대해 근사조정과 엄밀조정을 각각 수행하여 그 결과를 비교분석함으로써, 각 유형의 삼각망 중에 어느 유형의 근사조정이 엄밀조정과 유사한 결과를 취득할 수 있는 지, 그리고 유형별로 어떠한 특성을 가지고 있는지 파악하여 현재 지적기사 등에 출제되는 지적삼각측량 삼각망 조정문제의 정확도측면에서의 타당성과 실효성을 판단해보고자 한다. 연구결과, 삼각망조정에서 근사조정법과 최소제곱법으로 구한 각조정량은 관측각의 각조건 오차에 비례함을 알 수 있다. 즉, 엄밀조정 결과를 정확한 값으로 간주한다는 가정하에, 관측각 오차가 작을수록 근사조정 결과값은 엄밀조정 결과값에 가깝게 나타나는 경향이 있다. 좌표 조정은 주어진 삼각망의 제약조건(기지점의 수와 배치)에 민감한 성과를 도출함을 알 수 있다.

결론적으로 지적측량에서 이용하는 사각망, 유심다각망, 삽입망, 삼각쇄에 대한 삼각측량의 근사조정법은 최소제곱법의 대안으로 충분히 유효하다고 판단할 수 있으며, 다만 삼각쇄의 경우에는 도로, 하천 등 좁고 긴 형상의 지형이며 양 기선 사이의 거리가 매우 긴 지역에서는 적합하지 않은 것으로 판단된다.

주요어 : 지적삼각측량, 삼각망, 근사조정, 엄밀조정, 최소제곱법

ABSTRACT

This study compares and analyzes the results by performing approximate adjustment and rigorous adjustment on the centric polygonal network, the triangular insertion network and the triangular chain network except for triangulated quadrilateral network, which was already covered in the previous study. We identify which network types of approximation adjustment methods can achieve results similar to rigorous adjustments, and what characteristics they have. The validity and effectiveness of the cadastral triangulation problem, which is currently presented in the test of Engineer Cadastral Surveying, is judged. Studies show that the amount of angular adjustment obtained by the approximation method and the least squares method in triangulation is proportional to the angular error of the observation angle. That is, the smaller the observation angle error, the closer the approximate adjustment result is to the rigorous adjustment result, assuming that the rigorous

* 목포대학교 지적학과 교수(E-mail: mhpark@mokpo.ac.kr)
** 교신저자, 군산대학교 토목공학과 교수(E-mail: leeck@kunsan.ac.kr)

adjustment result is considered correct. It can be seen that coordinate adjustments produce performance sensitive to constraints (number and placement of base points) in a given triangular network.

In conclusion, the approximate adjustment method of triangulated quadrilateral network, the centric polygonal network, triangular insertion network and triangular chain network used in cadastral surveying can be considered sufficiently valid as an alternative to the least squares method, although in the case of triangular chain network, it is not suitable for narrow and long-shaped areas such as roads and streams and where the distance between the two base lines is very long.

Keywords : Cadastral Triangulation, Triangular Network, Approximate Adjustment, Rigorous Adjustment, Least Squares Method

1. 서 론

수평위치결정측량은 측점간의 정확한 상대적인 수평 위치를 결정하기 위해 수행된다. 그러한 수평위치결정은 전통적으로 삼변 측량, 삼각 측량 및 트래버스로 수행되었다. 이러한 전통적인 형태의 측량에는 거리, 방향 및 각도 측정이 포함된다. 모든 유형의 측량과 마찬가지로 이러한 측량을 수행하는 과정에서 오차가 발생하므로 그 오차는 분석되어야 하며 허용오차 이내의 경우 조정해야 한다. 최근 몇 년 동안, GPS(Global Positioning System)는 정확한 수평위치를 결정하기 위해 이러한 전통적인 절차를 점차적으로 대체해 왔다. 실제로 GPS는 수평 위치를 산출할 뿐만 아니라 타원체 높이도 제공한다. 따라서 GPS는 3차원 측량을 제공하며, 모든 측량과 마찬가지로, GPS 측량에도 오차가 있어 조정해야 한다.

전자 거리 측량 장비(Total Station)와 범지구항법위성시스템(GNSS)을 개발하기 전에는 장거리까지 수평 조정을 확장하기 위해 삼각 측량이 선호되었다. 광범위하게 배치된 기준점의 위치는 측정된 각도와 최소의 기선으로부터 계산된다. 이 방법은 미국 해안 및 측지 측량에서 국가 망의 대부분을 확장하는데 광범위하게 사용되었다. 삼변 측량(거리 측량)과 삼각 측량(각 측량)을 결합하는 측량방법이 보다 일반적이지만, 삼각 측량은 수평 조정을 수행하는데 있어 아직까지도 수많은 측량 기술자에 의해 사용되고 있다. 이러한 삼각측량에 의한 삼각망을 조정하는 방법에는 근사조정법과 엄밀조정법 두 가지가 있다. 현재 우리나라 지적 삼각측량에서 삼각점의 평균계산인 삼각규약과 망규약 및 변규약을 계산순서에 의하여 별개로 조정하는 방법을 근사조정법이라 하고 망방식에 의한 각규약, 망규약 및 변규약 계산을 동시에 처리하는 조정방법을 엄밀조정법이라고 한다. 대부분의 삼각점 성과는 주로 최소 제곱법을 적용한 삼각망 엄밀조정 방법에 의해 도출된다. 최소 제곱법 적용 삼각 측량 조정은 방위각 또는 각의 형태로 표현된 조건방정식 또는 관측 방정식을 사용한다. 본 연구에서는 엄밀조정법으로 관측 방정식 방법이 제시된다. 이 과정에는 매개변수가 국가 평면좌표와 같은 평면 직각 좌표계의 좌표인 매개 변수 조정이 포함된다. 대표적인 조정 유형으로는 전방교회법, 후방교회법, 사각망(사변형삼각망), 유심다각망(유심삼각망), 삼각쇄(단열삼각망), 삽입망으로 알려진 특정 유형들이 있다.

삼각측량 관련 연구에는 최근까지 어떠한 연구들이 수행되었는지 파악하기 위해 국회도서관 등을 통해 문헌조사를 수행하였으며, 대표적인 연구로 “中小電子計算機에 依한 單列三角網의 Data 處

理에 對한 考察"[1](김경택, 1982), "舊小三角地域에서의 基線三角網 平均計算"[2](金鐘炫, 1982), "有心多角網의 同時綜合精密調整에 關한 考察"[3](金英培, 1982), "우리나라 精蜜三角網調整에 關한 硏究"[4](國立地理院, 1984), "四邊形三角網의 平均計算法에 關한 硏究"[5](장상규, 김영섭, 1986), "망방식에 의한 삼각망 조정계산부 개선방안"[6](朴常進, 1990), "精密三角網의 成果算定 方案에 관한 硏究"[7](國立地理院, 1992), "解析的 方法을 利用한 삼각망 檢討에 關한 硏究"[8](李義梵, 1993), "GPS에 의한 지적삼각망의 정합성 분석"[9](姜準默 外, 1994) 등이 수행되었고, 가장 최근에 "삼각측량 근사조정법의 유효성"[10](이창경, 박민호, 이영진, 2017)에 대한 연구가 수행되었다. 이상과 같은 관련 연구의 추세를 살펴보면 우리나라의 경우 1982년에 근사조정법을 적용한 단열삼각망조정에 대한 연구를 시작으로 1980년대 중반까지 측량기준점에 대해 삼각망 정밀조정 위주로 연구가 진행되었다. 1986년도에 사각망을 대상으로 근사조정법과 엄밀조정법을 적용하여 결과를 비교하고 해석한 연구가 수행되었으며, 이후 1990년대 초까지 삼각망 정밀조정 방법에 있어 발전적인 방향으로의 개선방안 연구가 수행된 바 있다. 그러나 1990년대 초부터는 GPS에 의한 기준점측량방법이 일반화되면서 삼각측량에 의한 연구는 거의 수행되지 않았다고 볼 수 있다. 다만, 기존의 삼각망 성과에 대해 GPS를 사용한 연구로서, 정확도 평가 측면의 연구가 1994년도에 수행되었고, 학술적인 측면에서 2006년도에 구소삼각측량에 대한 몇 건의 연구가 수행된 이후로는 삼각측량 분야는 학생들의 교과목 이론수업과 기사시험문제에서만 다루어졌다. 그 이후 삼각측량에 관한 학술적 연구는 거의 이루어지지 않다가 2017년도에 이창경 외 2인에 의해 대학의 측량 이론수업과정에서 가르치는 삼각측량의 근사조정법이 얼마나 유효한 지 파악하기 위한 연구가 있었다. 본 연구와의 연관성면에서 볼 때 1986년도에 수행된 "四邊形三角網의 平均計算法에 關한 硏究"[11]에서 거의 유일하게 사각망만을 대상으로 삼각망조정을 위한 근사조정법(대수법 이용)과 엄밀조정법(조건방정식 이용)의 결과를 서로 비교하는 내용을 다루었다. 그 이후 이러한 관점을 주제로 한 연구가 거의 수행된 바 없다가 2017년도에 다시 유사한 연구로서 이창경외2인의 연구에서 근사조정법(진수법 이용)과 엄밀조정법(관측방정식 이용)의 비교분석 결과로 1986년도 연구와 마찬가지로 삼각망의 종류 중 사각망의 처리결과만을 제시하였다. 결과적으로 모든 종류의 삼각망에 대한 처리결과를 제시하지는 않았으며, 따라서 삼각망의 종류 간에 특성에 대한 비교분석은 이루어지지 않았다.

본 연구에서는 이상과 같은 삼각측량에 있어 대표적인 삼각망 유형 중 선행연구에서 자세히 다루어진 사각망을 제외한 유심다각망, 삽입망, 삼각쇄에 대해 근사조정과 엄밀조정을 각각 수행하여 그 결과를 비교분석함으로써, 각 유형의 삼각망 중에 어느 유형의 근사조정이 엄밀조정과 유사한 결과를 취득할 수 있는 지, 그리고 유형별로 어떠한 특성을 가지고 있는 지 파악하여 현재 지적기사 등

1) 김경택, "中小電子計算機에 依한 單列三角網의 Data 處理에 對한 考察", 전남대학교 대학원 석사학위논문, 1982.
2) 金鐘炫, "舊小三角地域에서의 基線三角網 平均計算", 「韓國地籍學會報」, 제4호, 1982, pp.73-92.
3) 金英培, "有心多角網의 同時綜合精密調整에 關한 考察", 「韓國地籍學會報」, 제4호, 1982, pp.37-71.
4) 國立地理院, "우리나라 精蜜三角網調整에 關한 硏究", 1984.
5) 장상규 · 김영섭, "四邊形三角網의 平均計算法에 關한 硏究", 「尙州農業專門大學論文集」, 1986, pp.83-87.
6) 朴常進, "망방식에 의한 삼각망 조정계산부 개선방안", 「地籍」, 1990, pp.48-59.
7) 國立地理院, "精密三角網의 成果算定 方案에 관한 硏究", 1992.
8) 李義梵, "解析的 方法을 利用한 삼각망 檢討에 關한 硏究", 「육군제3사관학교論文集」, 1993, pp.275-291.
9) 姜準默 外, "GPS에 의한 지적삼각망의 정합성 분석", 忠南大學校 敎育大學院 석사학위논문, 1995.
10) 이창경 · 박민호 · 이영진, "삼각측량 근사조정법의 유효성", 「한국지적학회지」, 제33권 제3호, 2017.
11) 장상규 · 김영섭, 전게서, pp.83-87.

에 출제되는 지적삼각측량 삼각망 조정문제의 정확도측면에서의 타당성과 실효성을 판단해보고자 한다.

본 연구는 다음과 같은 순서 및 방법으로 수행한다. 첫째, 삼각측량의 삼각망 조정이론으로서 근사조정법과 엄밀조정법에 대해 관련 참고문헌으로부터 검토하고 정리한다. 둘째, 국가기술자격증 지적기사를 대비하는 학생들이 일반적으로 쉽게 접하는 삼각망 조정문제 중 2017년도 논문인 “삼각측량 근사조정법의 유효성”에서 적용하여 결과를 도출한 바 있는 사각망을 제외한 유심다각망, 삽입망, 삼각쇄 조정문제를 관련 참고문헌에서 선택하고, 근사조정법과 엄밀조정법을 각각 적용하여 결과를 도출한다. 도출된 결과로부터 삼각망의 종류별로 근사조정법과 엄밀조정법의 결과를 비교하는 비교표를 작성하고 조정방법의 특성과 장단점, 유효성 등을 분석한다. 또한 비교분석 결과로부터 가능하다면 삼각망에 따른 근사조정법의 유효성 차이도 분석해보고자 한다. 즉, 어떤 종류의 삼각망에서 근사조정법이 보다 유효한 것인지 알 수 있기를 추가적으로 기대한다.

2. 삼각망 조정 이론

2.1 삼각망의 종류 및 조정 조건

토목건설 분야에서 삼각망의 종류는 측점배치에 따른 모양에 따라 사변형 삼각망, 유심삼각망, 단열삼각망으로 구별한다. 사변형 삼각망은 조건식의 수가 많아 가장 높은 정확도로 측정할 수 있는 삼각망이나, 포함면적이 작으며, 시간과 비용을 많이 요하는 것이 결점이다. 유심삼각망은 중심점 주변으로 삼각형이 배치되는 삼각망을 의미하며, 동일측점수에 비하여 포함하는 지역이 넓다. 정확도는 사변형보다 낮지만 단열삼각망보다 높아서 농지측량 등 방대한 지역의 측량에 적합하다. 단열삼각망은 거리가 길고 폭이 좁은 선형의 지역에 적합하며, 하천측량, 노선측량, 터널측량 등에 이용된다. 거리에 비하여 관측수가 적으므로 측량이 신속하고 측량비가 적게 드나 조건식이 적기 때문에 정확도가 낮다. 지적측량분야에서는 이러한 3가지 종류의 삼각망을 순서대로 각각 사각망, 유심다각망, 삼각쇄라고 부르며, 특히 유심다각망에서 삼각형 1개 또는 여러개가 빠진 형태의 삼각망을 구성하는 경우 삽입망이라고 한다.

이와 같은 삼각망을 형성하는 각 삼각형에서 각도를 측정함에 있어 다음의 3가지 조건이 만족되어야 한다.

첫째, 하나의 측점 주위에 있는 모든 각의 합은 360°가 되어야 하며, 둘째, 삼각망에서 임의의 한 변의 길이는 계산 순서에 관계없이 어느 변에서 계산하여도 같아야 하고, 셋째, 삼각망에서 각 삼각형 내각의 합은 180°가 되어야 한다.

그러나 이미 관측한 값이 아무리 정밀하게 관측하여도 항상 오차를 수반하여 상기의 조건이 만족되지 않으므로 이 조건이 만족하도록 모든 관측각을 조정하게 된다.

이상의 조건을 특성에 따라 2가지 형태로 구분하여 조정에 필요한 조건으로 측점조건과 도형(형태)조건으로 명명하고 있으며, 이를 삼각망의 기하학적 조건이라고 한다.

측점조건이란 각관측을 측점을 기준으로 실시할 때 둘레각의 합이 360°가 되어야 한다는 조건, 또는 1측점에 있어 각들의 합은 그 전체각을 1각으로 측정한 값과 같다는 조건이며, 임의의 1측점을 공통으로 하는 각각의 각 사이에 성립하는 기하학적 조건이다. 이를 측점규약(국소규약)이라고 하며 이 규약에 따라 조정하는 것을 측점조정이라 한다.

도형조건(형태조건)이란 삼각망내의 삼각형 내각의 합이 180° 등 기하학상의 관계에서 생기는 규약으로 도형규약(형태규약) 또는 일반규약이라고도 하며, 이 규약에 따라 조정하는 것을 도형조정 또는 일반조정이라고 한다. 이 조정에는 각도조정과 변조정이 있으며 각도조정에는 삼각조정과

〈표 1〉 삼각망 조정 조건 방정식 체계

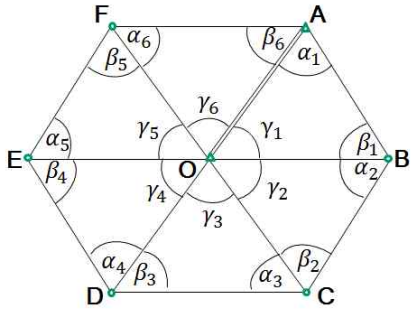
- 조건방정식
  - 측점방정식(국소조건)
  - 도형방정식(일반조건)
    - 각도방정식(각규약)
      - 삼각조정(삼각규약)
      - 망 조 정(망규약)
    - 변방정식(변규약)

망조정이 있다. 각 삼각형의 내각의 합이 180°가 되어야 하나 관측오차와 구과량 때문에 일치하지 않는다. 이 오차량을 조정하는 것을 삼각조정이라고 하며 삼각형이 2개 이상인 결합체 즉, 삼각망의 경우에 구성하는 오차를 조정하는 것을 망조정이라고 한다. 변조정은 기선에서 출발하여 삼각형의 순서에 따라 산출하는 임의의 변장은 그 계산 경로와 관계없이 모두 일치하여야 하나 일치하지 않는 오차가 발생한다. 이 오차를 조정하여 배부하는 것을 변조정이라고 한다. 이상의 기하학적 조건 등에 의한 식의 체계를 간략하게 나타내면 다음과 같다.

2.2 근사조정법

2.2.1 유심다각망 조정

유심다각망에 사용하는 각 삼각형의 기호는 [그림 1]과 같이 시계방향으로 정한다.



〔그림 1〕 유심다각망

A, O : 기지삼각점(평면직각종횡선좌표)
AO : 기지변
α : 소구변에 대한 내각
β : 기지변에 대한 내각
γ : 방위각 또는 기타각

각 삼각형이 같은 경중률에 의하여 관측되었다는 전제하에 아래와 같은 각도방정식이 성립해야 한다.

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 180^\circ \qquad \text{식(1)}$$

그러나 각 삼각형은 이 조건을 만족하지 않고 각관측의 오차와 구과량 등의 원인으로 인하여 작은 오차 ε가 생기게 된다.

따라서 식(1)을 오차가 수반한 공식으로 전환하면

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n - 180^\circ = \varepsilon_n \qquad \text{식(2)}$$

다음으로 그림 1에서 중심점 O에서 관측한 각의 합이 360°가 되어야 하는 측점방정식이 성립해야 한다.

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdot\cdot\cdot + \gamma_6 = 360^\circ \qquad \text{식(3)}$$

여기서 식(3)과 같이 만족하는 경우도 있으나, 여러 가지 여건으로 인하여 오차 e가 생기게 된다. 따라서 식(3)을 오차가 수반한 공식으로 고쳐 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdot\cdot\cdot+\gamma_6-360^\circ=e \qquad \text{식(4)}$$

이상의 오차를 삼각규약에 의해 배분하면, 삼각형 내각의 합이 180°가 되어야 하고, 한 개의 삼각형에서 생긴 오차를 소거하기 위하여 각 내각에 동일한 조건으로 오차를 3등분하여 각각에 배부를 한다. 각 삼각형에서 생긴 오차 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot\cdot\cdot, \varepsilon_6$ 가 측점방정식에 영향을 미치지 않도록 $\frac{\sum\varepsilon}{3n}$(3각형 수가 n개 일 때)를 각 γ 각에 배부하고 나머지 α, β각에 180°가 유지되도록

$-\frac{1}{2}\times\frac{\sum\varepsilon}{3n}=-\frac{\sum\varepsilon}{6n}$씩 배부한다. 이를 공식화하면

$$\begin{aligned}
&\alpha_1-\frac{\varepsilon_1}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n},\ \beta_1-\frac{\varepsilon_1}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n},\ \gamma_1-\frac{\varepsilon_1}{3}+\frac{\sum\varepsilon}{3n}\\
&\alpha_2-\frac{\varepsilon_2}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n},\ \beta_2-\frac{\varepsilon_2}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n},\ \gamma_2-\frac{\varepsilon_2}{3}+\frac{\sum\varepsilon}{3n}\\
&\qquad\vdots\\
&\alpha_6-\frac{\varepsilon_6}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n},\ \beta_6-\frac{\varepsilon_6}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n},\ \gamma_6-\frac{\varepsilon_6}{3}+\frac{\sum\varepsilon}{3n}
\end{aligned} \qquad \text{식(5)}$$

다음 순서는 망규약에 의해 측점방정식이 만족되도록 식(4)에서 오차e를 배부하는 것으로서 이는 γ 각에만 해당이 되며 γ각이 n개일 때 γ각에 배부할 량은 e/n 이다. 따라서 γ각에만 배부를 하게 되면 삼각규약에서 배부한 각이 충족되지 않게 되고 흐트러지므로 α, β각에 1/2씩 반대부호로 배부하여야 한다. 따라서 삼각형이 n개 일 때

$$\alpha=+\frac{e}{2n},\ \beta=+\frac{e}{2n},\ \gamma=-\frac{e}{n} \qquad \text{식(6)}$$

각도 및 측점규약을 종합하여 적용하면, 즉 식(5)와 식(6)을 종합하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\alpha_1-\frac{\varepsilon_1}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n}+\frac{e}{2n},\ \beta_1-\frac{\varepsilon_1}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n}+\frac{e}{2n},\\
&\gamma_1-\frac{\varepsilon_1}{3}+\frac{\sum\varepsilon}{3n}-\frac{e}{n}\\
&\qquad\vdots\\
&ⓐ\quad ⓑ\quad ⓒ\quad ⓓ\\
&\alpha_n-\frac{\varepsilon_n}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n}+\frac{e}{2n},\ \beta_n-\frac{\varepsilon_n}{3}-\frac{\sum\varepsilon}{6n}+\frac{e}{2n},\\
&\gamma_n-\frac{\varepsilon_n}{3}+\frac{\sum\varepsilon}{3n}-\frac{e}{n}
\end{aligned} \qquad \text{식(7)}$$

위 식에서 α와 β는 같고 γ만이 다르므로 이를 간단히 하기 위하여 α 각, β각의 ⓒ,ⓓ란을 풀면

$$-\frac{\sum\varepsilon}{6n}+\frac{e}{2n}=\frac{-\sum\varepsilon+3e}{6n}=-\frac{1}{3}\frac{\sum\varepsilon-3e}{2n} \qquad \text{식(8)}$$

이 된다.

식(8)에서 $\frac{\sum\varepsilon-3e}{2n}=\Pi$ 로 놓으면 식(8)은 $-\frac{1}{3}\Pi$ 가 된다.

γ각에 대하여 앞에 기술한 바와 같이 풀면

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum\varepsilon}{3n}-\frac{e}{n}=\frac{\sum\varepsilon-3e}{3n}=\frac{2}{3}\frac{\sum\varepsilon-3e}{2n}\\
&=\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\frac{\sum\varepsilon-3e}{2n}=\frac{3}{3}\\
&\Pi-\frac{1}{3}\Pi=\Pi-\frac{1}{3}\Pi
\end{aligned} \qquad \text{식(9)}$$

식(7)의 α, β 각에 식 (8)을 대입하면

$$\alpha_n-\frac{\varepsilon_n}{3}-\frac{\Pi}{3}=\alpha_n+\frac{-\varepsilon_n-\Pi}{3}$$

식(7)의 γ각에 식(9)를 대입하면

$$\gamma_n-\frac{\varepsilon_n}{3}+\Pi-\frac{\Pi}{3}=\gamma_n+\frac{-\varepsilon_n-\Pi}{3}+\Pi$$

가 된다. 앞에서 기술한 식 중 $\frac{-\varepsilon_n-\Pi}{3}=\mathrm{I}$ 로 표시하여 수식표현을 간략화 한다.

이상과 같이 유도된 (8), (9)식이 유심다각망 조정계산부(별지 제12호서식)에 적용된 각도방정식과 측점방정식을 만족하도록 조정된 근사조정법 계산식이다.

다음 순서로 변규약(변방정식)이 만족되도록 기선 AO에서 출발하여 삼각형의 번호순서대로 시계방향으로 변장이 계산되어 도착하게 되면 기선 OA와 일치되어야 한다. [그림 1]의 각 삼각형에 sin법칙을 적용하여 계산하면

$$\frac{OB}{OA}\times\frac{OC}{OB}\times\frac{OD}{OC}\times\frac{OE}{OD}\times\frac{OF}{OE}\times\frac{OA}{OF}=\frac{OA}{OA}=1$$

$$=\frac{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\sin\alpha_3\cdot\sin\alpha_4\cdot\sin\alpha_5\cdot\sin\alpha_6}{\sin\beta_1\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\beta_3\cdot\sin\beta_4\cdot\sin\beta_5\cdot\sin\beta_6} \quad \text{식(10)}$$

식(10)을 수열의 곱의 기호인 Π(파이)로 표시하여 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\Pi\sin\alpha}{\Pi\sin\beta}=1 \quad \text{식(11)}$$

그러나 실제 측정된 각에서는 각도 및 측점규약에서와 같이 약간의 오차를 수반하게 된다고 가정하면 이를 다음과 같은 공식으로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\frac{\Pi\sin\alpha}{\Pi\sin\beta}-1=E_1 \quad \text{식(12)}$$

$\sin\alpha$ 와 $\sin\beta$에 대한 변규약 경정수 등을 산출하기 위하여 $\sin 1''$에 대한 삼각함수 변화량 △는 sine의 여함수인 cosine에 의하여 계산된다.

$$\triangle=\sin 1''\times\cos\alpha(\beta) \quad \text{식(13)}$$

식(13)을 $\sin 10''$차이에 대한 변화량으로 계산하면 다음과 같은 계산식이 된다.

$$\triangle=48.4814\times 10\text{-}6\times\cos\alpha(\beta) \quad \text{식(14)}$$

삼각형 내각의 합이 180°인 점을 계속 유지해야 하므로 α, β의 변화량은 절댓값은 같고 부호는 반대이다. 즉, $\Delta\beta=(-\triangle\alpha)$이 된다. 식(12)과 식(14)에 의하여 계산된 값은 다음 법칙에 의하여 계산된다.

$\sin\alpha'$와 $\sin\beta'$에 대하여는 $\Pi\sin\alpha>\Pi\sin\beta$ 일 때는 $\sin\alpha'=\sin\alpha-\triangle\alpha$, 및 $\sin\beta'=\sin\beta+\triangle\beta$이며 $\Pi\sin\alpha<\Pi\sin\beta$ 일 때는 부호가 반대로 된다. 다음 순서로

$$\frac{\Pi\sin\alpha'}{\Pi\sin\beta'}-1=E_2 \quad \text{식(15)}$$

를 계산한다. 따라서 식(12), 식(14) 및 식(15)에 의하여 E_1과 E_2가 계산되면 변규약 경정수가 계산된다. 이를 10″에 대한 변화량을 기준으로 식(12)의 E_1을 0으로 만드는 x_1''를 구하는 비례식으로 만들면

$$10'' : E_1-E_2 = x_1'' : E_1$$

$$x_1''=\frac{10''E_1}{|E_1-E_2|} \quad \text{식(16)}$$

변규약 조정각에 대하여는 식(16)에서 계산된 값이 $+x_1''$일 때는 $\overline{\alpha}=\alpha-x_1''$, $\overline{\beta}=\beta+x_1''$이고, $-x_1''$일 때는 $\overline{\alpha}=\alpha+x_1''$, $\overline{\beta}=\beta-x_1''$가 된다. 이들의 값에 대하여는 식(16)에 준하여 x_2''를 계산함으로써 검산이 된다.

$$x_2''=\frac{10''E_2}{|E_1-E_2|} \quad \text{식(17)}$$

$$|x_1''-x_2''|=10'' \quad \text{식(18)}$$

이상과 같이 삼각망에 대한 각규약과 변규약에 의한 각조정이 완료되면 다음 순서로 조정각과 기지변장을 기선으로 하여 sine 법칙에 의하여 각 변장을 계산하고, 그 다음 각 측선의 방위각을 계산한다. 마지막으로 이상과 같이 구해진 각 측선의

길이와 방위각을 사용하여 측량의 목적인 위치결정, 즉 각 미지점의 종횡선 좌표를 계산한다.

예를 들면 기지점이 A일 때 소구점 C의 좌표는 기지점의 좌표에 AC측선의 종횡선차를 가감하여 산출한다. AC 변장을 l_1, 방위각을 V_A^C라 하면 C점의 좌표 Xc_1, Yc_1는 다음과 같다.

A점의 좌표가 X_A, Y_A라 할 때 $\triangle Xc_1 = l_1 \cos V_A^C$, $\triangle Yc_1 = l_1 \sin V_A^C$ 이므로

$$Xc_1 = X_A + \triangle Xc_1 = X_A + l_1 \cos V_A^C$$
$$Yc_1 = Y_A + \triangle Yc_1 = Y_A + l_1 \sin V_A^C \qquad \text{식(19)}$$

상기와 같은 방법으로 BC의 변장을 l_2, 방위각을 V_B^C라고 하면 C점의 좌표 Xc_2, Yc_2은 다음과 같다.

B점의 좌표가 X_B, Y_B 라 할 때 $\triangle Xc_2 = l_2 \cos V_B^C$, $\triangle Yc_2 = l_2 \sin V_B^C$ 이므로

$$Xc_2 = X_B + \triangle Xc_2 = X_B + l_2 \cos V_B^C$$
$$Yc_2 = Y_B + \triangle Yc_2 = Y_B + l_2 \sin V_B^C \qquad \text{식(20)}$$

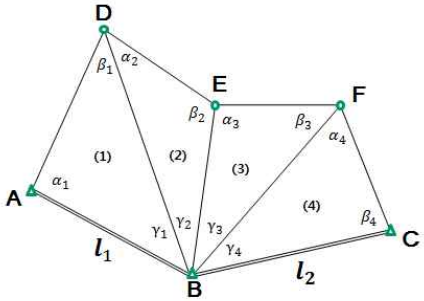
따라서 C점의 좌표는 식(19)와 식(20)에 의하여 두 개의 서로 다른 기지점으로부터 계산되므로 이를 평균하여 최종적으로 C점의 좌표로 결정한다.

$$Xc = (Xc_1 + Xc_2)/2$$
$$Yc = (Yc_1 + Yc_2)/2 \qquad \text{식(21)}$$

2.2.2 삽입망

삽입망은 유심다각망과 사각망에 비하여 기지점을 1개 더 이용함으로 기지변이 2개인 것이 특징이며 변장계산에 있어서도 기지변 AB에서 출발 계산하여 도착기지변 BC에 폐색함으로써 가장 합리적으로 신뢰할 수 있는 삼각망이다.

삼각규약은 유심다각망 조정에서 설명한 식(2)를 적용한다. 망규약에서는 그림 2에서 측점 B를 중심점으로 기지변 AB와 기지변 BC의 방위각에 의하여 산출된 내각과 측점 B를 중심으로 한 각 삼각형의 γ각의 합이 일치하는 지를 확인한다.



〔그림 2〕 삽입망

$$\Sigma\gamma - (\text{기지내각}) = e \qquad \text{식(22)}$$

이후의 과정은 모두 유심다각망과 동일하므로 생략한다.

다음으로 변규약에서는 삽입망의 기선이 두 개로서 출발변에서 계산을 시작하여 도착변에 도달하였을 때 계산값과 기지값이 일치되어야 한다.

이를 $sine$ 법칙에 의하여 풀면

$$\frac{\pi \sin\alpha \cdot l_1}{\pi sin\beta \cdot l_2} - 1 = 0 \qquad \text{식(23)}$$

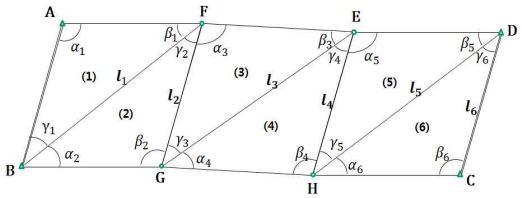
이 성립한다.

그러나 현실적으로는 오차가 존재하므로 유심다각망에서 언급된 식과 유사한 다음과 같은 식(24)로 표현되며 나머지 과정은 유심다각망과 동일한 방식으로 조정한다.

$$E_1 = \frac{\pi sin\alpha \cdot l_1}{\pi \sin\beta \cdot l_2} - 1,$$
$$E_2 = \frac{\pi sin\alpha' \cdot l_1}{\pi \sin\beta' \cdot l_2} - 1 \qquad \text{식(24)}$$

변규약에 의한 조정을 마친 후, 다음 순서로 변장계산, 방위각 계산, 종횡선좌표계산(미지점 위치결정)은 유심다각망과 동일한 풀이과정으로 해결한다.

2.2.3 삼각쇄



〔그림 3〕 삼각쇄

삼각쇄는 삽입망에서와 같이 기지변에 폐색을 시켜 삼각점의 좌표를 구하는 방법으로서 안전성이 있다. 그러나 출발점에서 도착점을 직접 관측할 수 없으며 대부분이 원거리임으로 양단에 기선을 두어 하천, 도로 등 좁고 긴 형상의 지형에 적합한 망형태이다.

이는 출발점에서 계산하여 도착점에 이르면 기지점에 폐색이 되지 않고 약간의 차이가 발생하게 된다. 따라서 삼각쇄는 다른 망에서와 같은 조정 이외에도 한 단계의 조정을 추가한다. 이는 γ 각에 대한 방위각차를 구하는 방법으로 망의 구성에 따라 약간씩 달라지게 된다.

[그림 3] 삼각쇄의 경우 점간거리를 평균 5Km로 선점하였다면 출발삼각점에서 도착삼각점까지 거리는 무려 15Km 거리의 변장이 되므로 이에 대한 조정을 하지 않으면 안된다. 따라서 관측각은 구면각을 이루게 되고 변장도 구면거리가 되므로 이를 평면거리로 보정한 후 처리하여야 한다.

삼각규약은 유심다각망, 삽입망과 동일한 방법으로 적용한다. 다음으로 망규약에서는 삽입망과 같이 기지내각이나 내각규약에 의하여 오차를 계산할 수 없고, 출발삼각점부터 시작하여 도착삼각점에 폐색시키는 방법으로 방위각에 의한 오차를 계산한다. [그림 3]에서 방위각산출과 오차계산은 기지점방위각 및 거리 계산부에서 이미 산출한 AB방위각과 DC방위각을 기초로 하여 계산하면 다음과 같다. 먼저 출발변에서 도착변에 이르도록 순차방위각을 계산하면

$$V_B^A + \gamma_1 = V_A^B \pm 180^\circ + \gamma_1 = V_B^F,$$
$$V_B^F \pm 180^\circ - \gamma_2 = V_F^G$$
$$V_F^G \pm 180^\circ + \gamma_3 = V_G^E\ ,\ \ V_G^E \pm 180^\circ - \gamma_4 = V_E^H$$
$$V_E^H \pm 180^\circ + \gamma_5 = V_H^D,\ \ V_H^D \pm 180^\circ - \gamma_6 = V_D^C$$

상기식을 좌변과 우변 각각 합하여 정리하면

$$V_A^B + \Sigma\gamma\text{홀수} - \Sigma\gamma\text{짝수} = V_D^C \qquad \text{식(25)}$$

방위각 계산에 의하여 발생하는 오차는

$$V_D^C - \text{기지도착방위각} = q \qquad \text{식(26)}$$

각 삼각형에 대하여 q값의 오차배부는 우선 방위각에 대한 계산을 행한 내각 γ에 배부하여야 하며 삼각규약에 의하여 배부한 각의 흐트러짐을 방지하기 위하여 α, β각에 절반씩 배부한다. 진행방향에 따라 공식화 하면 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ll} \gamma\text{각이 좌측에 있을 때} & \gamma\text{각이 우측에 있을 때} \\ \alpha = -q/2n & \alpha = +q/2n \\ \beta = -q/2n & \beta = +q/2n \\ \gamma = +q/n & \gamma = -q/n \\ & \\ n : \text{삼각형 갯수} & \end{array}\right] \qquad \text{식(27)}$$

변규약은 삼각쇄의 기선이 두 개이므로 삽입망과 동일하게 식 (28)을 적용한다.

$$E_1 = \frac{\pi \sin\alpha \cdot \ell_1}{\pi \sin\beta \cdot \ell_2} - 1,\ \ E_2 = \frac{\pi \sin\alpha' \cdot \ell_1}{\pi \sin\beta' \cdot \ell_2} - 1 \qquad \text{식(28)}$$

변규약에 의한 조정을 마친 후, 다음 순서로 변장계산, 방위각 계산은 유심다각망과 동일한 풀이 과정으로 해결한다.

끝으로 종횡선좌표계산은 삼각쇄에서는 변의 길이가 구면상의 거리이므로 이를 측지측량에 의한 투영면상에서 평면거리화 하여 각 방위각과 변

장에 의한 종횡선차에 이 계수를 산정함으로써 소구점좌표를 구하는 방법을 적용한다. 측선에 대한 중앙자오선으로부터의 거리를 구하기 위해 시작점의 기지좌표와 도착점의 기지좌표를 사용하여 그 평균값을 구한다. 즉, 출발기지좌표 $B(X_B, Y_B)$, 도착기지좌표 $D(X_D, Y_D)$라고하면

$$Y = (Y_B + Y_D)/2 \qquad \text{식(29)}$$

단위는 Km로서 구면거리를 평면거리로 계산하는 계수는 다음과 같다.

$$S:s = \frac{1}{m_0}\left[1 - \frac{1}{8R^2}(Y_B + Y_D)^2\right] \qquad \text{식(30)}$$

식(29)를 변형하면 $2Y = Y_B + Y_D$ 식(31)

식(29)를 식(30)에 대입하면

$$S:s = \frac{1}{m_0}\left[1 - \frac{1}{8R^2}(2Y)^2\right] \qquad \text{식(32)}$$

우리나라 측량체계는 TM도법에 의한 중앙자오선 축척계수가 1이므로 이를 식(32)에 대입하면

$$S:s = \frac{1}{1}\left[1 - \frac{4Y^2}{8R^2}\right] = 1 - \frac{Y^2}{2R^2} \qquad \text{식(33)}$$

S : 기지점과 소구점간의 회전타원체 상의 거리(구면거리)
s : 투영면상에서의 기지점과 소구점간의 평면거리
R : Bessel 치에 의한 지구평균반경 6370Km
m0 : 중앙자오선 축척계수

식(33)에서 평면거리의 계수를 구한다. 다음 γ각에 의하여 방위각을 구한 변에 대하여 변장과 해당 방위각에 의하여 종횡선차를 구한다음 이 값에 계수를 곱한다.

BF에 대한 종횡선차

$$\triangle X_{BF} = l_1 \times \cos V_B^F, \quad \triangle Y_{BF} = l_1 \times \sin V_B^F$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \text{식(34)}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

HD에 대한 종횡선차

$$\triangle X_{HD} = l_5 \times \cos V_H^D, \quad \triangle Y_{HD} = l_5 \times \sin V_H^D$$

식(33)과 식(34)에 의하여 계산하면

$$\triangle X'_{BF} = \triangle X_{BF} \times (S:s),$$
$$\triangle Y'_{BF} = \triangle Y_{BF} \times (S:s)$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \text{식(35)}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\triangle X'_{HD} = \triangle X_{HD} \times (S:s),$$
$$\triangle Y'_{HD} = \triangle Y_{HD} \times (S:s)$$

식(35)에 기지점 $B(X_B, Y_B)$의 좌표를 더하여 산출좌표를 구한다.

$$X'_F = X_B + \triangle X'_{BF}, \quad Y'_F = Y_B + \triangle Y'_{BF}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \text{식(36)}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

$$X'_D = X'_H + \triangle X'_{HD}, \quad Y'_D = Y'_H + \triangle Y'_{HD}$$

식(36)에서 산출된 좌표 $D'(X'_D, Y'_D)$와 기지좌표 $D(X_D, Y_D)$의 차를 계산하고 이를 종횡선차에 균등 배부한다.

$$X'_D - X_D = e_x, \quad Y'_D - Y_D = e_y$$
$$d_x = -\frac{e_x}{u}, \quad d_y = -\frac{e_y}{u}, \quad u : \text{소구점수} + 1$$

식(37)

종횡선좌표를 구하는 식은

$$X_F = X_B + \triangle X'_{BF} + d_x,$$
$$Y_F = Y_B + \triangle Y'_{BF} + d_y \quad \text{식(38)}$$

따라서 지금까지 계산된 방위각, 변장 및 변규약 조정각은 식(38)로 계산된 조정좌표에 의하여 다시 계산하여 수정한다. 거리와 방위각은 기지점 방위각 및 거리계산부에 의하고 각 삼각형의 내각은 cosine 제2법칙에 의한 삼각형 내각 계산부에 의한다.

2.3 엄밀조정법

서론에서 언급한 바와 같이 삼각망 조정에 있어 엄밀조정법으로 불리는 최소제곱법을 적용하는 방법으로 관측방정식을 적용하는 경우와 조건방정식을 적용하는 경우 두 가지가 대표적이라 할 수 있다. 우리나라에서 지금까지 출판된 대부분의 대학교 측량교재에서는 주로 조건방정식의 풀이과정을 체계적으로 설명하고 있다. 이러한 조건방정식 적용방법은 풀이과정에서 조건방정식을 형성하는 경로에 따라 조건식의 구성이 달라질 수 있어 미세하더라도 결과의 차이가 있을 수 있다. 한편으로 관측방정식 방법은 조건방정식 방법에 비해 계산에 사용되는 방정식의 수가 적고, 방정식의 형태도 보다 단순한 경우가 많아 조건방정식 방법보다 쉽게 방정식을 구성할 수 있다. 또한 컴퓨터 프로그램에 의한 수치해석에 유리하고[12], 대단위 행렬계산이 가능한 정보화 시대에서 관측방정식을 이용하여 결과를 도출하는 것이 보다 경제적이라 사료된다.[13] 따라서 본 연구에서는 관측방정식을 적용하는 방법에 대한 수학적 모델을 다음과 같이 보여준다.

방위각 관측방정식이 식(40)과 같이 성립된다.

$$azimuth = \alpha + C \quad \text{식(39)}$$

여기서 $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right)$, x_i, y_i는 측점 I의 좌표, x_i, y_i는 시준점 J의 좌표 C는 평면직각좌표계 상의 4사분면의 위치에 따른 각도상수(0°, 180°, 360°)

식(39)를 측선 IJ의 측정방위각에 대한 매개변수형태의 관측방정식으로 표현하면 식(40)과 같다.

$$\tan^{-1}\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right) + C = Az_{ij} + v_{Az} \quad \text{식(40)}$$

여기서 Az_{ij}는 측정방위각, v_{Az}는 측정방위각의 잔차, x_i, y_i는 측점I 좌표의 최확값, x_j, y_j는 시준점 J좌표의 최확값

식(40)은 변수 x_i, y_i, x_j, y_j를 포함하는 비선형함수로서 식(41)과 같이 표현될 수 있다.

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = Az_{ij} + v_{Az} \quad \text{식(41)}$$

여기서 $F(x_i, y_i, x_j, y_j) = \tan^{-1}\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right) + C$

식(41)을 테일러급수 1차미분까지 적용하여 선형화하면 식(42)와 같이 표현될 수 있다.

$$F(x_i,\ y_i,\ x_j,\ y_j) = F(x_{i0},\ y_{i0},\ x_{j0},\ y_{j0}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 dx_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0 dy_i + \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_0 dx_j + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0 dy_i \quad \text{식(42)}$$

여기서, x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}은 초기값이며,

$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0$ 은 초기값으로 계산되는 편미분값,

12) 이창경·박민호·이영진·전게서, 「한국지적학회지」, 제33권 제3호, 2017.
13) 이은수, "관측방정식을 활용한 다각망도선법 조정에 관한 연구", 「한국지적학회지」, 제30권 제2호, 2014, pp.45-54.

그리고 dx_i, dy_i, dx_j, dy_i 은 식(42) 선형함수에서의 미지량이며, 식(43)에서 반복계산에 사용되는 보정량

$$x_i = x_{i_0} + dx_i,\ \ y_i = y_{i_0} + dy_i,$$
$$x_j = x_{j_0} + dx_j,\ \ y_j = y_{j_0} + dy_j \qquad \text{식(43)}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \quad \text{식(44) 이므로}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{1+[(x_j-x_i)/(y_j-y_i)]^2}\frac{-1}{y_j-y_i} = \frac{-1(y_j-y_i)}{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2} = \frac{y_i-y_j}{IJ^2} \qquad \text{식(45)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{x_j-x_i}{IJ^2},\ \ \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{y_j-y_i}{IJ^2},\ \ \frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{x_i-x_j}{IJ^2} \qquad \text{식(46)}$$

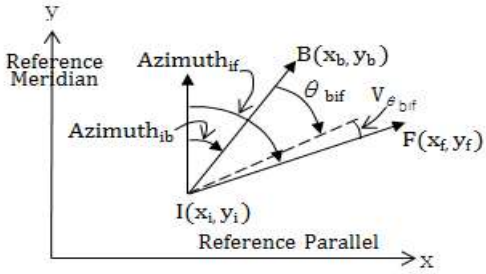
여기서, $IJ^2 = (x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i)^2$

식(45)와 식(46)이 식(42)에 대입되고 그 결과가 식(41)에 대입되면 다음 식(47)과 같은 기본형 방위각관측 모델 방정식이 만들어진다.

$$\left(\frac{y_i-y_j}{IJ^2}\right)_0 dx_i + \left(\frac{x_j-x_i}{IJ^2}\right)_0 dy_i + \left(\frac{y_j-y_i}{IJ^2}\right)_0 dy_j + \left(\frac{x_i-x_j}{IJ^2}\right)_0 dx_j = k_{Az_{ij}} + v_{Az_{ij}} \qquad \text{식(47)}$$

여기서,

$$k_{Az_{IJ}} = A_{z_{ij}} - [\tan^{-1}\left(\frac{x_j-x_i}{y_j-y_i}\right)_0 + C] \text{ and}$$
$$IJ^2 = (x_j-x_i)_0^2 + (y_j-y_i)_0^2$$



〔그림 4〕 두 개 방위각과 교각 사이의 관계

[그림 4]에서 B는 후시점, F는 전시점, I는 기계점이다. [그림 4]에서 보여지는 바와 같이 각관측 방정식은 두 개의 방위각 관측 사이의 차이에 의해 표현될 수 있다.

$$\angle BIF = Az_{IF} - Az_{IB} = \tan^{-1}\left(\frac{x_f-x_i}{y_f-y_i}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_b-x_i}{y_b-y_i}\right) + D = \theta_{bif} + v_\theta \qquad \text{식(48)}$$

여기서, θ_{bif}는 측정내각, v_θ는 측정각 잔차, x_b, y_b, x_i, y_i, x_f, y_f는 각각 후시점 B, 기계점 I, 전시점 F의 좌표의 최확값이다. D는 후시와 전시의 각 사분면에 의존한 각도상수 C의 차이로 나타낼 수 있다.

$$D = C_{if} - C_{ib} \qquad \text{식(49)}$$

식 (48)은 $x_b, y_b, x_i, y_i, x_f, y_f$의 비선형함수로서 식 (50)과 같다.

$$F(x_b,\ y_b,\ x_i,\ y_i,\ x_f,\ y_f) = \theta_{bif} + v_\theta \qquad \text{식(50)}$$

여기서, $F(x_b,\ y_b,\ x_i,\ y_i,\ x_f,\ y_f) = \tan^{-1}\left(\frac{x_f-x_i}{y_f-y_i}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_b-x_i}{y_b-y_i}\right) + D$

식 (50)은 테일러급수 1차 미분까지 적용하여 선형화하면 식 (51)과 같이 표현될 수 있다.

$$F(x_b,\ y_b,\ x_i,\ y_i,\ x_f,\ y_f) = F(x_b,\ y_b,\ x_i,\ y_i,\ x_f,\ y_f)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_b}\right)_0 dx_b + \left(\frac{\partial F}{\partial y_b}\right)_0 dy_b + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 dx_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0 dy_i + \left(\frac{\partial F}{\partial x_f}\right)_0 dx_f + \left(\frac{\partial F}{\partial y_f}\right)_0 dy_f \qquad \text{식(51)}$$

여기서,

$(\frac{\partial F}{\partial x_b})_0, (\frac{\partial F}{\partial y_b})_0, (\frac{\partial F}{\partial x_i})_0, (\frac{\partial F}{\partial y_i})_0, (\frac{\partial F}{\partial x_f})_0, (\frac{\partial F}{\partial y_f})_0$ 은 초기값 $x_{b0}, y_{b0}\, x_{i0}, y_{i0}, x_{f0}, y_{f0}$로 계산되는 편미분값, 그리고 $dx_b, dy_b, dx_i, dy_i, dx_f, dy_f$는 식(51)

선형함수에서의 미지량이며, 식(52)에서 반복계산에 사용되는 보정량임.

$$\left(\frac{y_i-y_b}{IB^2}\right)_0 dx_b+\left(\frac{x_b-x_i}{IB^2}\right)_0 dy_b+\left(\frac{y_b-y_i}{IB^2}-\frac{y_f-y_i}{IF^2}\right)_0 dx_i \quad \text{식(52)}$$
$$+\left(\frac{x_i-x_b}{IB^2}-\frac{x_i-x_f}{IF^2}\right)_0 dy_i+\left(\frac{y_f-y_i}{IF^2}\right)_0 dx_f$$
$$+\left(\frac{x_i-x_f}{IF^2}\right)_0 dy_f=k_\theta+v_\theta$$

여기서, $k_\theta=\theta_{bif}-\theta_{bif_0}$

$$\theta_{bif_0}=\tan^{-1}\left(\frac{x_f-x_i}{y_f-y_i}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x_b-x_i}{y_b-y_i}\right)+D$$
$$IB^2=(x_b-x_i)^2+(y_b-y_i)^2$$
$$IF^2=(x_f-x_i)^2+(y_f-y_i)^2$$

식 (52)는 식 (53)으로 정리될 수 있다.

$$\left(\frac{y_i-y_f}{IF^2}\right)_0 dx_i+\left(\frac{x_f-x_i}{IF^2}\right)_0 dy_i+\left(\frac{y_f-y_i}{IF^2}\right)_0 dx_f$$
$$+\left(\frac{x_i-x_f}{IF^2}\right)_0 dy_f$$
$$-\left[\left(\frac{y_i-y_b}{IB^2}\right)_0 dx_i+\left(\frac{x_b-x_i}{IB^2}\right)_0 dy_i+\left(\frac{y_b-y_i}{IB^2}\right)_0 dx_b\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x_i-x_b}{IB^2}\right)_0 dyb\right]=k_{BIF}+v_\theta \quad \text{식(53)}$$

식 (52)는 삼각형에서 관측내각에 대한 관측방정식의 기본 모델식으로 사용할 수 있으며, 이러한 관측방정식을 삼각망에서의 모든 삼각형의 관측내각에 대해 구성할 수 있다. 또한 이러한 관측방정식은 모든 유형의 삼각망(유심다각망, 사각망, 삽입망, 삼각쇄 등) 조정에 활용이 가능하다. 따라서 미지점 및 기지점으로 구성된 삼각망에서 관측교각별로 관측방정식을 구성하고 미지수 개수보다 많은 관측방정식으로부터 최소제곱법을 적용하여 미지수인 미지점의 좌표를 구한다. 최소제곱법을 적용하는 계산방법으로 보편적으로 행렬을 이용한 계산을 수행하며, 이상의 모든 계산과정을 수치계산에 널리 활용되는 Matlab 프로그램을 사용하여 행렬형태로 프로그래밍하여 수행함으로써 미지점의 좌표를 구한다.

3. 적용 및 해석

3.1 조정 방법

본 연구에서 사용한 삼각망은 지적측량관련 대학교재와 지적기사 참고서에 실린 삼각망 문제 중 어떤 문제를 사용하여도 상관없지만, 전체적으로 검토하여 그 중 삼각형 개수가 많고 시범적용 문제로 대표성이 있다고 판단되는 문제를 선택한 것이다.

근사조정법 적용과정은 망의 유형과 기선의 배치형태에 따라 조금씩 다르며, 다음과 같은 순서에 따라 수행된다. “제2장 삼각망 조정 이론”에서 언급한 바와 같이 우선적으로 각조건과 변조건을 순차적으로 만족시키는 각조정량을 계산한다. 그 다음, sine법칙에 의해 각 측선의 길이를 계산하고, 기선의 방위각으로부터 각 측선의 방위각을 구한 후, 각 측선의 길이와 방위각으로부터 미지점의 좌표를 구한다. 이러한 근사조정 과정은 Excel프로그램을 사용하여 자동계산방식으로 결과를 도출하기도 하나, 본 연구에서는 학생들이 근사조정 계산과정을 이론적으로 이해하고 있는지 중점을 둔 지적기사 내업에 초점을 맞추어 모든 과정을 공학용계산기를 사용하여 수행하였다.

본 연구에서 언급하는 엄밀조정법은 Ghilani (2006)에 의해 저술된 책에 수록된 각관측방정식을 삼각측량 삼각망조정에 적용한 것을 말한다.[14]

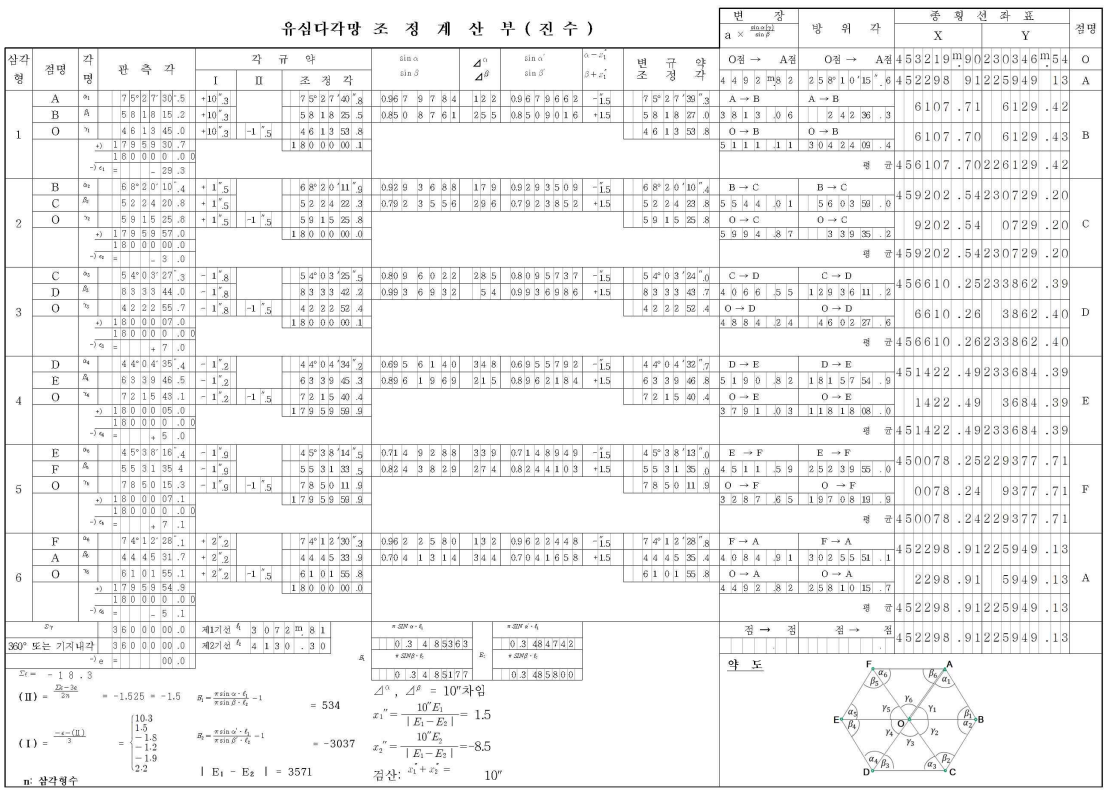
14) Charles D. Ghilani, “Adjustment Computations_Spatial Data Analysis”, Wily, 2018, pp.283-302.

본 연구에서는 이 최소제곱법에 의한 삼각망 조정 원리를 공학계산용 프로그램으로 널리 활용되는 MATLAB으로 작성하여 실현한 망조정프로그램을 사용하여 엄밀조정 결과를 도출하였다. 최소제곱법에서는 관측방정식을 선형화하여 미지값의 보정량을 반복적으로 계산하므로 미지점의 대략적인 초기좌표가 필요하다. 이를 위해 일반적으로 조정 전 관측각을 이용하여 임의 기지점에서 미지점에 이르는 변장과 방위각을 구하고, 이로부터 다각망 도선법(트래버스측량법)에 의해 그 초기좌표를 계산하는 방법을 사용하나, 본 연구에서는 초기값이 매우 대략적인 값일 경우 반복계산 횟수가 얼마나 되는지 파악하기 위하여 의도적으로 10m 이하의 수치를 생략한 대략적인 초기 값을 사용하였다. 조정 결과로 미지점의 조정좌표와 그 표준편차, 조정관측각과 관측각 조정량, 관측각 표준편차 등이 산출된다.

3.2 근사조정과 엄밀조정의 결과 및 분석

3.2.1 유심다각망

본 연구에서 표본으로 선정한 유심다각망은 2개의 기지점과 5개의 미지점을 연결한 측선으로 단위삼각형을 구성하되 바깥에 6개의 측점이 있고, 그 중앙에 모든 단위삼각형에 속한 한 측점이 있도록 배치한 삼각망이다. [그림 5] 약도에서 미지점(B, C, D, E, F)의 평면직각좌표를 결정하기 위해 수평각 18개(α_1, β_1, γ_1, ..., α_6, β_6, γ_6)를 관측하였다면, 그 관측각은 기하학적 조건(삼각형의 각조건과 변조건, 측점조건)을 만족하여야 한다. 유심다각망의 관측각을 공학용계산기에 의해 근사조정법으로 조정한 결과는 [그림 5]와 같다. 동일한 유심다각망 관측값을 MATLAB을 이용하여 최소제곱법으로 조정한 결과는 <표 2>와 같다.



〔그림 5〕 유심다각망 근사조정 결과

〈표 2〉 유심다각망 엄밀조정 결과

****
Known Points - COORDINATE
****

Station	X	Y	X std	Y std
O	230346.540	453219.900	0.001	0.001
A	225949.130	452298.910	0.001	0.001

****
Final Result
****
****
Adjusted Stations COORDINATE
****

Station	X	Y	Sx	Sy
B	226129.408	456107.704	0.099	0.129
C	230729.187	459202.567	0.187	0.182
D	233862.406	456610.280	0.165	0.163
E	233684.391	451422.481	0.134	0.125
F	229377.701	450078.246	0.088	0.087

****
Adjusted Angle
****

Back	Occu	Fore	Deg	Min	Sec	Resi	R.Num	Test	OutlierFlag
B	A	O	75	27	39.9	-9.4	0.39	11.18	0
O	B	A	58	18	26.6	-11.4	0.41	38.02	0
A	O	B	46	13	53.5	-8.5	0.45	5.34	0
C	B	O	68	20	10.8	-0.4	0.41	0.01	0
O	C	B	52	24	23.7	-2.9	0.44	0.38	0
B	O	C	59	15	25.5	+0.3	0.45	0.00	0
D	C	O	54	3	24.3	+3.0	0.41	0.42	0
O	D	C	83	33	42.9	+1.1	0.38	0.06	0
C	O	D	42	22	52.8	+2.9	0.45	0.37	0
E	D	O	44	4	32.4	+3.0	0.51	0.36	0
O	E	D	63	39	46.8	-0.3	0.45	0.00	0
D	O	E	72	15	40.8	+2.3	0.45	0.23	0
F	E	O	45	38	12.6	+3.8	0.51	0.56	0
O	F	E	55	31	35.2	+0.2	0.48	0.00	0
E	O	F	78	50	12.1	+3.2	0.45	0.45	0
A	F	O	74	12	29.2	-1.1	0.42	0.05	0
O	A	F	44	45	35.6	-3.9	0.48	0.65	0
F	O	A	61	1	55.3	-0.2	0.46	0.00	0

<표 3>의 근사조정과 엄밀조정의 비교 결과에서 최소제곱법 조정 결과, 관측각은 -11.4″~3.8″ 범위에서 조정되었음을 알 수 있다. 또한 근사조정법과 엄밀조정법 사이의 각조정량의 차이는 -0.6″~0.8″로서 평균편차는 0.34″이고 평균제곱근오차는 ±0.39″로 나타나, 결과적으로 근사조정법은 엄밀조정법과 거의 같은 성과를 도출하였다.

유심다각망의 조정방법 간 미지점의 좌표차이는 <표 4>와 같다. 근사조정법과 엄밀조정법 간 미지점의 좌표차이는 절대편차 기준으로 최소 0.001m~최대 0.027m 범위로 나타났으며, 평균위치오차는 0.017m에 불과하여 거의 차이가 없다고 볼 수 있다. 즉, 유심다각망의 경우 지적삼각점 측량성과와 검사측량 성과의 연결교차 허용범위가 0.2m인 것을 감안하면 근사조정법은 최소제곱법에 버금가는 성과를 도출한 것임을 알 수 있다. 또한 지적재조사측량에서 지적기준점의 지적재조사측량성과와 지적재조사측량성과에 대한 검사의 연결교차 허용범위인 3cm를 기준으로 하더라도 근사조정 결과는 엄밀조정 결과와 비교하여 그 기준 안에 들어오는 매우 양호한 결과를 도출하는, 엄밀조정법과 거의 유사한 조정방법인 것으로 판단할 수 있다.

〈표 3〉 유심다각망 관측각에 대한 근사조정과 엄밀조정의 비교

각 명	관측각 ⓪	망조정법		교차(″)	
		근사조정 ①	엄밀조정 ②	⓪-②	①-②
α1	75° 27′ 30.5″	75° 27′ 39.3″	75° 27′ 39.9″	-9.4	-0.6
β1	58° 18′ 15.2″	58° 18′ 27.0″	58° 18′ 26.6″	-11.4	0.4
γ1	46° 13′ 45.0″	46° 13′ 53.8″	46° 13′ 53.5″	-8.5	0.3
α2	68° 20′ 10.4″	68° 20′ 10.4″	68° 20′ 10.8″	-0.4	-0.4
β2	52° 24′ 20.8″	52° 24′ 23.8″	52° 24′ 23.7″	-2.9	0.1
γ2	59° 15′ 25.8″	59° 15′ 25.8″	59° 15′ 25.5″	0.3	0.3
α3	54° 03′ 27.3″	54° 03′ 24.0″	54° 03′ 24.3″	3	-0.3
β3	83° 33′ 44.0″	83° 33′ 43.7″	83° 33′ 42.9″	1.1	0.8
γ3	42° 22′ 55.7″	42° 22′ 52.4″	42° 22′ 52.8″	2.9	-0.4
α4	44° 04′ 35.4″	44° 04′ 32.7″	44° 04′ 32.4″	3	0.3
β4	63° 39′ 46.5″	63° 39′ 46.8″	63° 39′ 46.8″	-0.3	0
γ4	72° 15′ 43.1″	72° 15′ 40.4″	72° 15′ 40.8″	2.3	-0.4
α5	45° 38′ 16.4″	45° 38′ 13.0″	45° 38′ 12.6″	3.8	0.4
β5	55° 31′ 35.4″	55° 31′ 35.0″	55° 31′ 35.2″	0.2	-0.2
γ5	78° 50′ 15.3″	78° 50′ 11.9″	78° 50′ 12.1″	3.2	-0.2
α6	74° 12′ 28.1″	74° 12′ 28.8″	74° 12′ 29.2″	-1.1	-0.4
β6	44° 45′ 31.7″	44° 45′ 35.4″	44° 45′ 35.6″	-3.9	-0.2
γ6	61° 01′ 55.1″	61° 01′ 55.8″	61° 01′ 55.3″	-0.2	0.5
			평균편차	3.22	0.34
			평균제곱근오차	±4.55	±0.39

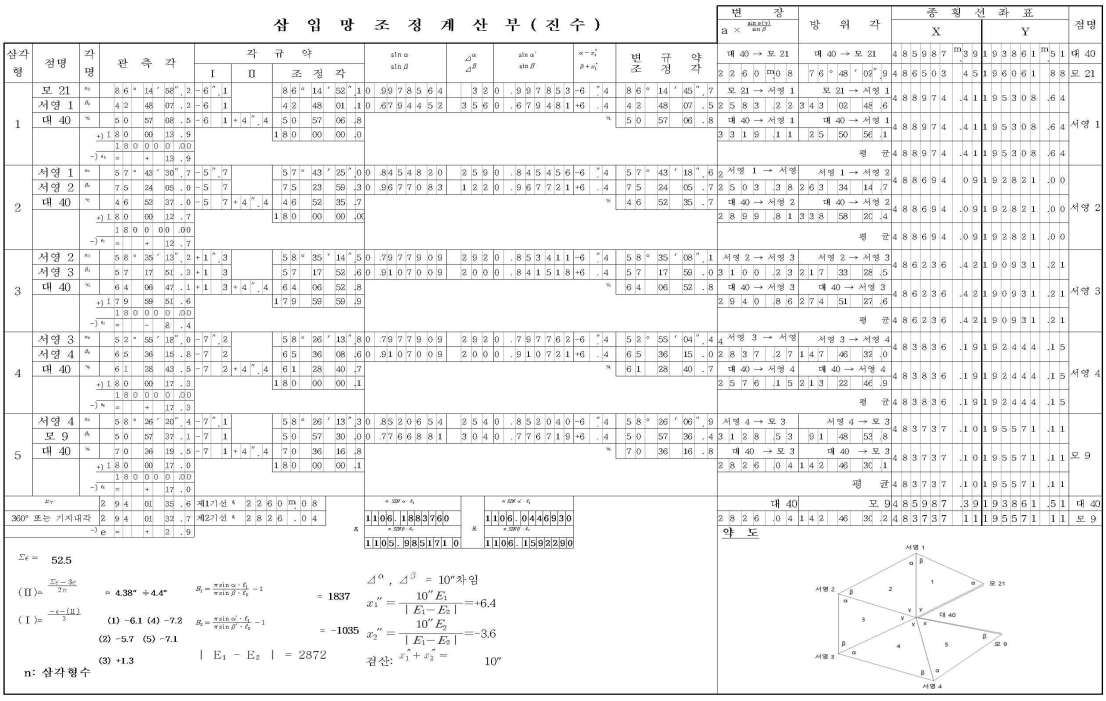
〈표 4〉유심다각망 미지점 좌표에 대한 근사조정과 엄밀조정의 비교

점 명	동서좌표(m)			남북좌표(m)			교차(m)	
	근사조정 Ⓨ	엄밀조정/sd X		근사조정 Ⓧ	엄밀조정/sd Y		Ⓨ-X	Ⓧ-Y
B	226129.42	226129.408	0.099	456107.70	456107.704	0.129	0.012	-0.004
C	230729.20	230729.187	0.187	459202.54	459202.567	0.182	0.013	-0.027
D	233862.40	233862.406	0.165	456610.26	456610.28	0.163	-0.006	-0.02
E	233684.39	233684.391	0.134	451422.49	451422.481	0.125	-0.001	0.009
F	229377.71	229377.701	0.088	450078.24	450078.246	0.087	0.009	-0.006
					평균편차		0.008	0.013
					평균제곱근오차		±0.009	±0.016
					평균위치오차		0.017	

3.2.2 삽입망

본 연구에서 표본으로 선정한 삽입망은 3개의 기지점과 4개의 미지점을 연결한 측선으로 단위삼각형을 구성하며, 3개의 기지점이 연속으로 연결되어 2개의 기선을 이루고 중간기지점이 유심다각망의 중심점과 유사한 모양으로 배치된 형태로서 유심다각망에서 삼각형 1개가 빠져있는 형태로 간주할 수 있다. 따라서 측점조건에서의 차이를 제외하면 유심다각망과 거의 동일한 근사조정방법이 적용된다고 볼 수 있다.

[그림 6] 약도에서 미지점(서영1, 서영2, 서영3, 서영4)의 평면직각좌표를 결정하기 위해 수평각 15개(α_1, β_1, γ_1, ..., α_5, β_5, γ_5)를 관측하였다면,



〔그림 6〕 삼입망 근사조정 결과

그 관측각은 기하학적 조건(삼각형의 각조건과 변조건, 측점조건)을 만족하여야 한다. 삽입망의 관측각을 공학용계산기에 의해 근사조정법으로 조정한 결과는 [그림 6]과 같다. 동일한 삽입망 관측값을 MATLAB을 이용하여 최소제곱법으로 조정한 결과는 <표 5>와 같다.

〈표 5〉 삽입망 엄밀조정 결과

****
Known Points - COORDINATE
****

Station	X	Y	1X std	Y std
대40	193861.510	485987.390	0.001	0.001
모21	196061.880	486503.450	0.001	0.001
모9	195571.110	483737.110	0.001	0.001

****
Final Result
****
****
Adjusted Stations COORDINATE
****

Station	X	Y	Sx	Sy
서영1	195308.677	488974.379	0.103	0.148
서영2	192821.019	488694.108	0.137	0.130
서영3	190931.207	486236.441	0.146	0.134
서영4	192444.147	483836.183	0.098	0.112

****
Adjusted Angle
****

Back	Occu	Fore	Deg	Min	Sec	Resi	R.Num	Test	OutlierFlag
대40	모21	서영1	86	14	47.9	+10.3	0.41	2.95	0
모21	서영1	대40	42	48	8.3	-1.1	0.50	0.02	0
서영1	대40	모21	50	57	3.8	+4.7	0.49	0.37	0
대40	서영1	서영2	57	43	19.8	+10.9	0.44	3.23	0
서영1	서영2	대40	75	24	2.9	+2.1	0.40	0.08	0
서영2	대40	서영1	46	52	37.3	-0.3	0.47	0.00	0
대40	서영2	서영3	58	35	8.2	+5.0	0.47	0.44	0
서영2	서영3	대40	57	17	58.7	-7.4	0.47	1.08	0
서영3	대40	서영2	64	6	53.1	-6.0	0.47	0.66	0
대40	서영3	서영4	52	55	4.1	+13.9	0.49	6.33	0
서영3	서영4	대40	65	36	13.9	+1.9	0.44	0.06	0
서영4	대40	서영3	61	28	42.0	+1.5	0.47	0.04	0
대40	서영4	모9	58	26	6.3	+14.1	0.50	6.36	0
서영4	모9	대40	50	57	37.2	-0.1	0.51	0.00	0
모9	대40	서영4	70	36	16.5	+3.0	0.47	0.16	0

〈표 6〉 삽입망 관측각에 대한 근사조정과 엄밀조정의 비교

각 명	관측각 ⓪	망조정법		교차(″)	
		근사조정 ①	엄밀조정 ②	⓪-②	①-②
α1	86° 14′ 58.2″	86° 14′ 45.7″	86° 14′ 47.9″	10.3	-2.2
β1	42° 48′ 07.2″	42° 48′ 07.5″	42° 48′ 08.3″	-1.1	-0.8
γ1	50° 57′ 08.5″	50° 57′ 06.8″	50° 57′ 03.8″	4.7	3.0
α2	57° 43′ 30.7″	57° 43′ 18.6″	57° 43′ 19.8″	10.9	-1.2
β2	75° 24′ 05.0″	75° 24′ 05.7″	75° 24′ 02.9″	2.1	2.8
γ2	46° 52′ 37.0″	46° 52′ 35.7″	46° 52′ 37.3″	-0.3	-1.6
α3	58° 35′ 13.2″	58° 35′ 08.1″	58° 35′ 08.2″	5	-0.1
β3	57° 17′ 51.3″	57° 17′ 59.0″	57° 17′ 58.7″	-7.4	0.3
γ3	64° 06′ 47.1″	64° 06′ 52.8″	64° 06′ 53.1″	-6	-0.3
α4	52° 55′ 18.0″	52° 55′ 04.4″	52° 55′ 04.1″	13.9	0.3
β4	65° 36′ 15.8″	65° 36′ 15.0″	65° 36′ 13.9″	1.9	1.1
γ4	61° 28′ 43.5″	61° 28′ 40.7″	61° 28′ 42.0″	1.5	-1.3
α5	58° 26′ 20.4″	58° 26′ 06.9″	58° 26′ 06.3″	14.1	0.6
β5	50° 57′ 37.1″	50° 57′ 36.4″	50° 57′ 37.2″	-0.1	-0.8
γ5	70° 36′ 19.5″	70° 36′ 16.8″	70° 36′ 16.5″	3	0.3
			평균편차	5.49	1.11
			평균제곱근오차	±7.19	±1.43

<표 6>의 근사조정과 엄밀조정의 비교 결과에서 최소제곱법 조정 결과, 관측각은 -7.4″~14.1″ 범위에서 조정되었음을 알 수 있다. 또한 근사조정법과 엄밀조정법 사이의 각조정량의 차이는 -2.2″~3.0″로서 평균편차는 1.11″이고 평균제곱근오차는 ±1.43″로 나타나, 유심다각망에서의 결과와 마찬가지로 근사조정법은 엄밀조정법과 거의 차이가 없는 성과를 도출하였다.

삽입망에서 조정방법 별 미지점의 좌표 값은 <표 7>과 같다. 근사조정법과 엄밀조정법 간 미지점의 좌표차이는 절대편차 기준으로 최소 0.003m ~최대 0.037m 범위로 나타났으며, 평균위치오차

〈표 7〉 삽입망 미지점 좌표에 대한 근사조정과 엄밀조정의 비교

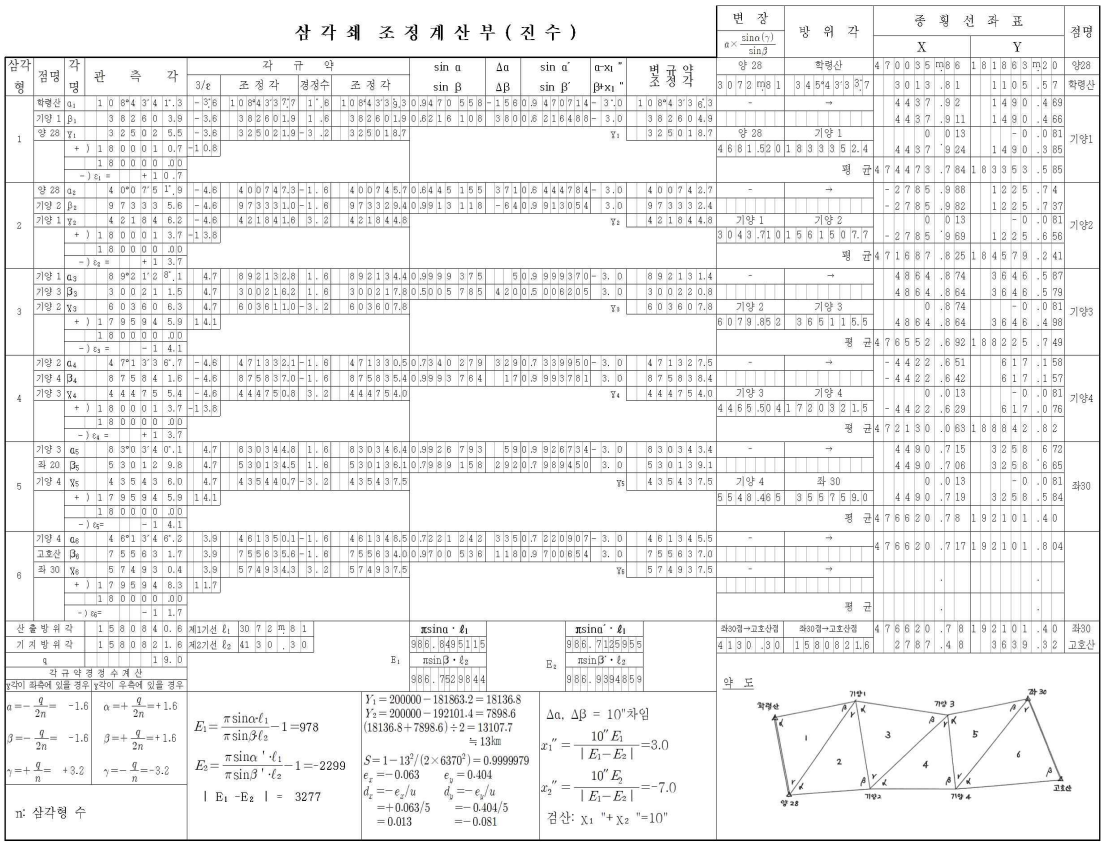
점 명	동서좌표(m)			남북(m)좌표			교차(m)	
	근사조정 Ⓨ	엄밀조정/sd X		근사조정 Ⓧ	엄밀조정/sd Y		Ⓨ-X	Ⓧ-Y
서영1	195308.64	195308.677	0.103	488974.41	488974.379	0.148	-0.037	0.031
서영2	192821	192821.019	0.137	488694.09	488694.108	0.13	-0.019	-0.018
서영3	190931.21	190931.207	0.146	486236.42	486236.441	0.134	0.003	-0.021
서영4	192444.15	192444.147	0.098	483836.19	483836.183	0.112	0.003	0.007
					평균편차		0.016	0.019
					평균제곱근오차		±0.021	±0.021
					평균위치오차		0.026	

는 0.026m에 불과하여 유심다각망과 마찬가지로 거의 차이가 없다고 볼 수 있다. 지적삼각점 측량 성과와 검사측량 성과의 연결교차 허용범위가 0.2m인 것을 감안하면 삽입망의 경우도 근사조정법은 최소제곱법과 거의 비슷한 성과를 도출한 것임을 알 수 있다. 또한 유심다각망과 마찬가지로, 지적재조사측량에서 지적기준점의 지적재조사측량성과와 지적재조사측량성과에 대한 검사의 연결교차 허용범위인 3cm를 기준으로 하더라도, 삽입망의 근사조정 결과는 엄밀조정 결과와 비교하여 그 기준 안에 들어오는 매우 양호한 결과를 도출하는 유효한 조정방법인 것으로 판단할 수 있다.

3.2.3 삼각쇄

본 연구에서 표본으로 선정한 삼각쇄는 삼각망 좌우 양단에 기선이 각 1개씩 존재하는 기지점 4점과 그 사이에 배치된 미지점들을 연결하여 단위삼각형을 만들고, 그 단위삼각형들이 일련의 사슬 모양이 되도록 구성한 삼각망이다[그림 3]. [그림 7] 약도에서 미지점(기양1, 기양2, 기양3, 기양4)의 평면직각좌표를 결정하기 위해 수평각 18개($\alpha_{1,}$, β_1, γ_1, ..., $\alpha_{6,}$, β_6, γ_6)를 관측하였다면, 그 관측각은 기하학적 조건(삼각형의 각조건과 변조건, 방위각 조건)을 만족하여야 한다.

삼각쇄의 관측각을 공학용계산기에 의해 근사조정법으로 조정한 결과는 [그림 7]과 같다. 동일한 삼각쇄 관측값을 MATLAB을 이용하여 최소제곱법으로 조정한 결과는 <표 8>과 같다.



〔그림 7〕 삼각쇄 근사조정 결과

〈표 8〉 삼각쇄 엄밀조정 결과

****
Known Points - COORDINATE
****

Station	X	Y	X std	Y std
양28	181863.200	470035.860	0.001	0.001
학령산	181105.570	473013.810	0.001	0.001
좌30	192101.400	476620.780	0.001	0.001
고호산	193639.320	472787.480	0.001	0.001

****
Final Result
****
****
Adjusted Stations COORDINATE
****

Station	X	Y	Sx	Sy
기양1	183353.571	474473.743	0.125	0.097
기양2	184579.348	471687.828	0.118	0.093
기양3	188225.637	476552.615	0.131	0.104
기양4	188842.862	472130.105	0.129	0.101

****
Adjusted Angle
****

Back	Occu	Fore	Deg	Min	Sec	Resi	R.Num	Test	OutlierFlag
기양1	학령산	양28	108	43	37.8	+3.5	0.51	0.39	0
양28	기양1	학령산	38	26	7.0	-3.1	0.59	0.27	0
학령산	양28	기양1	32	50	15.2	+10.3	0.64	3.62	0
기양1	양28	기양2	40	7	42.1	+9.8	0.50	4.42	0
양28	기양2	기양1	97	33	32.5	+3.1	0.45	0.34	0
기양2	기양1	양28	42	18	45.4	+0.8	0.58	0.02	0
기양3	기양1	기양2	89	21	30.7	-2.6	0.58	0.18	0
기양2	기양3	기양1	30	2	23.6	-12.1	0.66	5.51	0
기양1	기양2	기양3	60	36	5.7	+0.6	0.48	0.01	0
기양3	기양2	기양4	47	13	30.1	+6.6	0.51	1.54	0
기양2	기양4	기양3	87	58	38.2	+3.4	0.46	0.41	0
기양4	기양3	기양2	44	47	51.7	+3.7	0.52	0.44	0
좌30	기양3	기양4	83	3	44.8	-4.7	0.45	0.85	0
기양4	좌30	기양3	53	1	36.9	-7.1	0.45	2.13	0
기양3	기양4	좌30	43	54	38.3	-2.3	0.50	0.17	0
좌30	기양4	고호산	46	13	49.7	-3.5	0.72	0.28	0
기양4	고호산	좌30	75	56	36.1	-4.4	0.70	0.45	0
고호산	좌30	기양4	57	49	34.2	-3.8	0.70	0.33	0

〈표 9〉 삼각쇄 관측각에 대한 근사조정과 엄밀조정의 비교

각 명	관측각 ⓪	망조정법		교차(″)	
		근사조정 ①	엄밀조정 ②	⓪-②	①-②
α1	108° 43′ 41.3″	108° 43′ 36.3″	108° 43′ 37.8″	3.5	-1.5
β1	38° 26′ 03.9″	38° 26′ 04.9″	38° 26′ 07.0″	-3.1	-2.1
γ1	32° 50′ 25.5″	32° 50′ 18.7″	32° 50′ 15.2″	10.3	3.5
α2	40° 07′ 51.9″	40° 07′ 42.7″	40° 07′ 42.1″	9.8	0.6
β2	97° 33′ 35.6″	97° 33′ 32.4″	97° 33′ 32.5″	3.1	-0.1
γ2	42° 18′ 46.2″	42° 18′ 44.8″	42° 18′ 45.4″	0.8	-0.6
α3	89° 21′ 28.1″	89° 21′ 31.4″	89° 21′ 30.7″	-2.6	0.7
β3	30° 02′ 11.5″	30° 02′ 20.8″	30° 02′ 23.6″	-12.1	-2.8
γ3	60° 36′ 06.3″	60° 36′ 07.8″	60° 36′ 05.7″	0.6	2.1
α4	47° 13′ 36.7″	47° 13′ 27.5″	47° 13′ 30.1″	6.6	-2.6
β4	87° 58′ 41.6″	87° 58′ 38.4″	87° 58′ 38.2″	3.4	0.2
γ4	44° 47′ 55.4″	44° 47′ 54.0″	44° 47′ 51.7″	3.7	2.3
α5	83° 03′ 40.1″	83° 03′ 43.4″	83° 03′ 44.8″	-4.7	-1.4
β5	53° 01′ 29.8″	53° 01′ 39.1″	53° 01′ 36.9″	-7.1	2.2
γ5	43° 54′ 36.0″	43° 54′ 37.5″	43° 54′ 38.3″	-2.3	-0.8
α6	46° 13′ 46.2″	46° 13′ 45.5″	46° 13′ 49.7″	-3.5	-4.2
β6	75° 56′ 31.7″	75° 56′ 37.0″	75° 56′ 36.1″	-4.4	0.9
γ6	57° 49′ 30.4″	57° 49′ 37.5″	57° 49′ 34.2″	-3.8	3.3
			평균편차	4.74	1.77
			평균제곱근오차	±5.68	±2.12

<표 9>의 근사조정과 엄밀조정의 비교 결과에서 최소제곱법 조정 결과, 관측각은 -12.1″~10.3″ 범위에서 조정되었음을 알 수 있다. 또한 근사조정법과 엄밀조정법 사이의 각조정량의 차이는 -4.2″~3.5″로서 평균편차는 1.77″이고 평균제곱근오차는 ±2.12″로 나타나, 삽입망에서의 결과와 마찬가지로 근사조정법은 엄밀조정법과 별로 차이가 없는 성과를 도출하였다.

삼각쇄에서 조정방법 별 미지점의 좌표 값은 <표 10>과 같다. 근사조정법과 엄밀조정법 간 미지점의 좌표차이는 절대편차 기준으로 최소 0.003m~최대 0.112m 범위로 나타났으며, 평균위치오차는 0.086m로 나타나 유심다각망, 삽입망과 비교할 때 유의미한 차이가 있다고 볼 수 있다. 지적삼각점 측량성과와 검사측량 성과의 연결교차 허용범위가 0.2m인 것을 감안하면 삼각쇄의 경우도 근사조정법은 최소제곱법과 비교할 때 사용가능한 성과를 도출한 것임을 알 수 있다. 그러나 지적재조사측량에서 지적기준점의 지적재조사측량성과와 지적재조사측량성과에 대한 검사의 연결교차 허용범위인 3cm를 기준으로 하면, 삼각쇄의 근사조정 결과는 엄밀조정 결과와 비교하여 적용하기 어려운 조정방법인 것으로 판단할 수 있다.

이러한 결과는 앞의 유심다각망, 삽입망의 경우와는 다른 경향을 보인 것이며, 본 연구의 삼각쇄 관측값의 경우 근사조정법과 최소제곱법간 상관관계가 약함을 의미한다. 이와 같은 특이한 현상은 본 연구에 이용된 관측 값으로부터 비롯된 것이지

〈표 10〉 삼각쇄 미지점 좌표에 대한 근사조정과 엄밀조정의 비교

점 명	동서좌표(m)			남북(m)좌표			교차(m)	
	근사조정 Ⓨ	엄밀조정/sd X		근사조정 Ⓧ	엄밀조정/sd Y		Ⓨ-X	Ⓧ-Y
기양1	183353.585	183353.571	0.125	474473.784	474473.743	0.097	0.014	0.041
기양2	184579.241	184579.348	0.118	471687.825	471687.828	0.093	-0.107	-0.003
기양3	188225.749	188225.637	0.131	476552.692	476552.615	0.104	0.112	0.077
기양4	188842.82	188842.862	0.129	472130.063	472130.105	0.101	-0.042	-0.042
					평균편차		0.069	0.041
					평균제곱근오차		±0.081	±0.048
					평균위치오차		0.086	

만, 부분적으로 삼각망의 구조와 조정법의 차이에서도 비롯되었을 것이다. 즉, 삼각쇄의 경우 기지점 4점이 양단에 배치되고 미지점이 이들 기지점 사이에 배치되는 망이고, 제2장 근사조정법의 원리에서 설명한 바와 같이 출발점에서 도착점을 직접 관측할 수 없으며 대부분이 원거리임으로 양단에 기선을 두어 하천, 도로 등 좁고 긴 형상의 지형에 적합한 망형태이다. 이는 출발점에서 계산하여 도착점에 이르면 기지점에 폐색이 되지 않고 약간의 차이가 발생하게 된다. 즉, 양 기선 사이의 거리가 매우 긴 경우가 많고, 따라서 관측각은 구면각을 이루게 되고 변장도 구면거리가 되는데, 이를 평면거리로 간주하고 계산하게 되므로, 미지점 좌표의 계산 시 구면거리로 환산하는 과정에서 추가적인 오차가 발생할 것으로 판단된다.

4. 결 론

본 연구에서 살펴 본 유심다각망, 삽입망, 삼각쇄의 망구조와 관측각, 삼각망조정에 따른 각 및 좌표 조정량을 분석하여 정리하면 다음과 같다. 삼각망조정에서 근사조정법과 최소제곱법으로 구한 각조정량은 관측각의 각조건(삼각형의 내각의 합은 180°) 오차에 비례함을 알 수 있다. 즉, 관측각의 품질이 우수할수록 근사조정법은 최소제곱법에 가까운 성과를 낸다. 좌표 조정량은 주어진 삼각망의 제약조건(기지점의 수와 배치)에 민감한 성과를 도출함을 알 수 있다.

특히, 근사조정과 엄밀조정 결과를 비교분석하여 다음과 같은 특성이 있음을 파악하였다.

첫째, 엄밀조정결과를 정확한 값으로 간주한다는 가정하에, 관측각 오차가 작을수록 근사조정 결과값은 엄밀조정 결과값에 가깝게 나타나는 경향이 있다.

둘째, 유심다각망과 삽입망에서 미지점좌표는 근사조정결과가 엄밀조정결과와 비교할 때 각각 1.7cm, 2.6cm 차이를 가지며, 이는 지적재조사측량에서 지적기준점에 대한 측량성과와 검사성과의 허용 연결교차인 3cm이내로서 근사조정결과가 매우 유효함을 보여주는 근거기준이 될 수 있다.

셋째, 삼각망의 종류 중 삼각쇄는 그 적용범위의 특성에서 예견되었던 바와 같이 근사조정결과를 엄밀조정결과와 비교할 때 미지점 좌표에서 약 8.6cm의 차이를 보여, 근사조정에 의해 미지점좌표를 구하는 경우 삼각쇄를 적용한 망조정은 오차가 허용범위를 초과할 수 있으므로 유심다각망, 삽입망, 사각망에 비해 유효하지 않음을 파악할 수 있다.

이상의 분석내용은 삼각망 종류별로 1개씩 선정하여 처리한 결과만을 가지고 분석한 판단이므로 본 연구의 결과만을 기준으로 모든 경우에 해

당되는 것으로 일반화시키기에는 한계가 있으며, 추후 각 삼각망 종류별로 여러 개를 선정하여 적용해 보고 결론을 도출하는 것이 바람직하고 필요한 연구일 것으로 사료된다. 결론적으로 지적측량에서 이용하는 사각망, 유심다각망, 삽입망, 삼각쇄에 대한 삼각측량의 근사조정법은 최소제곱법의 대안으로 충분히 유효하다고 판단할 수 있으며, 다만 삼각쇄의 경우에는 도로, 하천 등 좁고 긴 형상의 지형이고 양 기선 사이의 거리가 매우 긴 지역에서는 적합하지 않은 것으로 판단된다.

〈참고문헌〉

1. 姜準默 外, “GPS에 의한 지적삼각망의 정합성 분석”, 忠南大學校 敎育大學院 석사학위논문, 1995.
2. 國立地理院, “우리나라 精蜜三角網調整에 關한 硏究”, 1984.
3. 國立地理院, “精密三角網의 成果算定 方案에 관한 硏究”, 1992.
4. 김경택, “中小電子計算機에 依한 單列三角網의 Data 處理에 對한 考察”, 전남대학교 대학원 석사학위논문, 1982.
5. 金鐘炫, “舊小三角地域에서의 基線三角網 平均計算”, 「韓國地籍學會報」, 제4호, 1982.
6. 金英培, “有心多角網의 同時綜合精密調整에 關한 考察”, 「韓國地籍學會報」, 제4호, 1982.
7. 朴常進, “망방식에 의한 삼각망 조정계산부 개선방안”, 「地籍」, 1990.
8. 李義梵, “解析的 方法을 利用한 삼각망 檢討에 關한 硏究”, 「육군제3사관학교論文集」, 1993.
9. 이은수, “관측방정식을 활용한 다각망도선법 조정에 관한 연구”, 「한국지적학회지」, 제30권 제2호, 2014.
10. 이창경·박민호·이영진, “삼각측량 근사조정법의 유효성”, 「한국지적학회지」, 제33권 제3호, 2017.
11. 장상규·김영섭, “四邊形三角網의 平均計算法에 關한 硏究”, 「尙州農業專門大學論文集」, 1986.
12. Charles D. Ghilani, “Adjustment Computations_Spatial Data Analysis”, Wily, 2018.

(접수일 2019.07.10., 심사일 2019.07.17., 심사완료일 2019.07.26.)